∽ Baccalauréat ES Polynésie juin 2009 ∾

Exercice 1 — 4 points

Commun à tous les candidats.

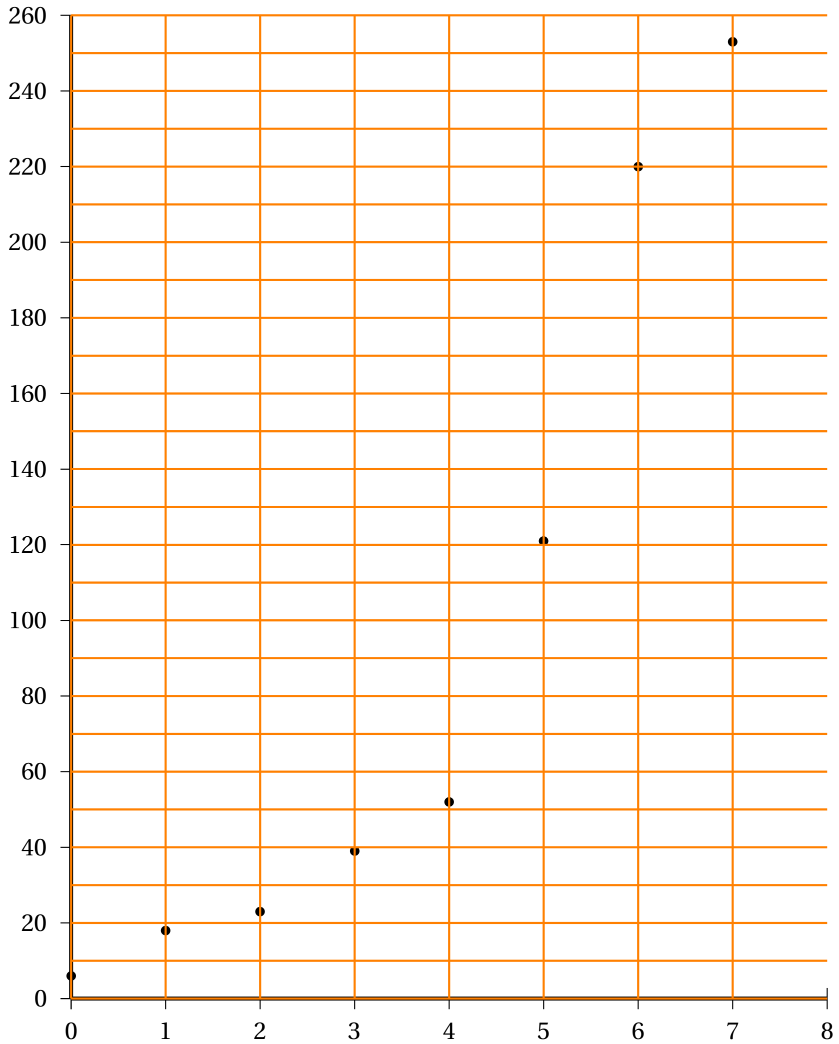
1. La droite d'équation $x = 2$ est asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}$.
2. $\ln(4\text{e}^x) = \ln 4 + \ln(\text{e}^x) = \ln 4 + x$.
3. La fonction est sous la forme e^u dont la dérivée est ?$u'\text{e}^u$; ici, $u(x) = -x^2$ d'où $u'(x) = -2x$ et donc $f'(x) = -2x\text{e}^{-x^2}$.
4. est égale à :
   On a une fonction composée : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \text{e}^x = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{e}^{1-\ln x} = 0$.

Exercice 2 — 5 points

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. **a.** On calcule $\dfrac{253}{220} = 1,15$ ce qui correspond à une augmentation de 15 %.

   b. En 2010, on aurait avec ce rythme $253 \times 1,15^3 \approx 384,781$ soit environ 384 781 m^2 ; l'objectif ne serait donc pas atteint
2. **a.**



b.

Rang de l'année : x_i, $1 \leqslant i \leqslant 8$	0	1	2	3	4	5	6	7
$z_i = \ln\left(y_i\right)$, $1 \leqslant i \leqslant 8$	1,79	2,89	3,14	3,66	3,95	4,8	5,39	5,53

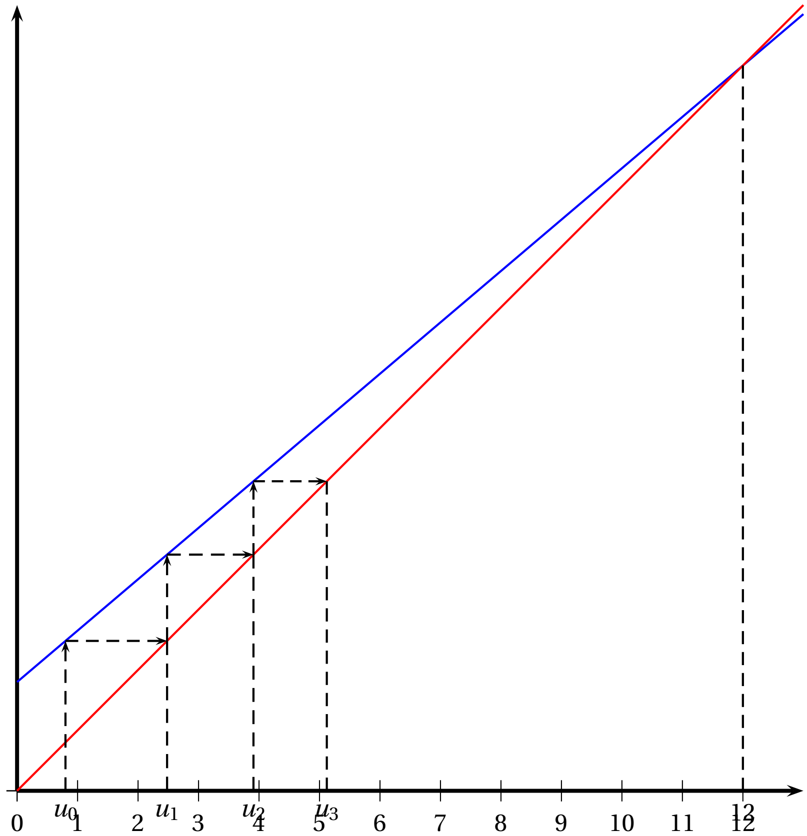
c. La calculatrice livre : $z = 0,52x + 2,06$.

d. Pour $x = 10$, $z = 7,26$; or $z = \ln(y)$, donc $y = \mathrm{e}^{7,26} \approx 1\,422,257$: l'objectif est atteint.

Exercice 2 — 5 points

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. **a.**



b. Voir la figure ci-dessus.

c. Le graphique montre que la limite de la suite est voisine de 12.

2. **a.** $v_n = u_n - 12 \Rightarrow v_{n+1} = u_{n+1} - 12 = 0,85u_n + 1,8 - 12 = 0,85u_n - 11,2 = 0,85\,(u_n - 12) = 0,85v_n$.

Conclusion : $v_{n+1} = 0,85v_n$ ce qui montre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,85 et de premier terme : $v_0 = u_0 - 12 = 8 - 12 = -4$

b. On a donc : $v_n = v_0 \times 0,85^n = -4 \times 0,85^n$. De $v_n = u_n - 12$ il résulte que $u_n = v_n + 12 = 12 - 4 \times 0,85^n$.

c. On a $v_{n+1} - v_n = 0,85v_n - v_n = -0,15v_n$. Comme $v_0 < 0$ et $0,85 > 0$, tous les termes de la suite (v_n) sont négatifs, donc $-0,15v_n > 0$ et finalement $v_{n+1} - v_n > 0$, ce qui signifie que la suite (v_n) est croissante.

Comme $u_{n+1} - u_n = v_{n+1} + 12 - (v_n + 12) = v_{n+1} + 12 - v_n - 12 = v_{n+1} - v_n > 0$, comme on vient de le voir.

La suite (u_n) est croissante.

d. Comme $-1 < 0,85 < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,85^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 12$, ce qui confirme la conjecture précédente.

3. **a.** En milliers d'abonnés soit w_n la suite du nombre d'abonnés l'année 2008+ n.

On a $w_0 = 8$ et $w_{n+1} = (1 - 0,15)\,w_n + 1,8 = 0,85w_n + 1,8$.

On a donc $w_n = u_n$ pour tout naturel n.

b. D'après la question 2. b. le nombre d'abonnés en 2014 = 2008 + 6 est :
$u_6 = 12 - 4 \times 0,85^6 \approx 10,4914$.

En 2014 il y aura environ 10 491 abonnés.

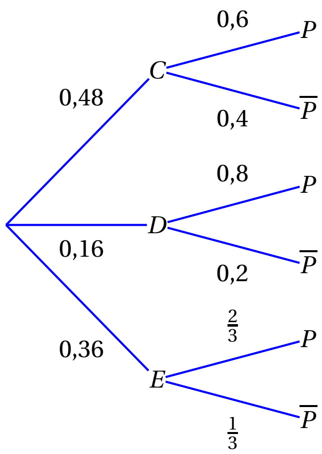
Exercice 3 — 4 points

Commun à tous les candidats.

1. **a.** On a $p(C) = 0,48$, $p(E) = 1 - 0,48 - 0,16 = 0,36$.

   $p_D\left(\overline{P}\right) = 0,2$ et $p_E(P) = \dfrac{2}{3}$.

   b.



2. La probabilité cherchée est : $p(C \cap P) = 0,48 \times 0,6 = 0,288$.
3. D'après la loi des probabilités totales :

   $p(P) = p(C \cap P) + p(D \cap P) + p(E \cap P) = 0,288 + 0,16 \times 0,8 + 0,36 \times \dfrac{2}{3} = 0,656$.
4. On cherche $p_P(D) = \dfrac{p(P \cap D)}{p(D)} = \dfrac{0,128}{0,656} \approx 0,195$.
5. On reconnaît un schéma de Bernoulli.

   L'évènement contraire de « au moins une souris est performante » est « les quatre souris ne sont pas performantes », la probabilité de ce dernier évènement est :

   $\left[p\left(\overline{P}\right)\right]^4 = (1 - 0,656)^4 = 0,344^4 \approx 0,986$.

   La probabilité d'obtenir au moins une souris performante est d'environ 0,986.

Exercice 4 — 6 points

Commun à tous les candidats.

1. **a.** • En $+\infty$: on a $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} -\ln x = -\infty$ ainsi que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} 1 - \ln x = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} 2x = +\infty$ d'où finalement par produit de limites $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} 2x(1 - \ln x) = -\infty$.

   • En 0 : On a $f(x) = 2x - 2 \times x \ln x$: comme chaque terme a pour limite zéro, on a $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

   b. On a $f(x) = u(x) \times v(x)$, avec $u(x) = 2x$ et $v(x) = 1 - \ln x$.

   Donc $f'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) = 2(1 - \ln x) + 2x \times \left(-\dfrac{1}{x}\right) = 2 - 2\ln x - 2 = -2\ln x$.

   c. On sait que si $0 < x < 1$, $\ln x < 0$, donc $f'(x) > 0$;

   Si $1 < x$, $\ln x >$, donc $f'(x) < 0$. D'où le tableau de variations :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\|\|$ 0	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

2. $f(x) = 0 \iff 2x(1 - \ln x) = 0 \iff 1 - \ln x = 0$, car sur $]0~;~+\infty[$, $2x > 0$.
Donc $f(x) = 0 \iff 1 = \ln x \iff \ln \text{e} = \ln x \iff \text{e} = x$.
La courbe $\mathscr{C}$ admet un unique point d'intersection A avec l'axe des abscisses et A(e ; 0).

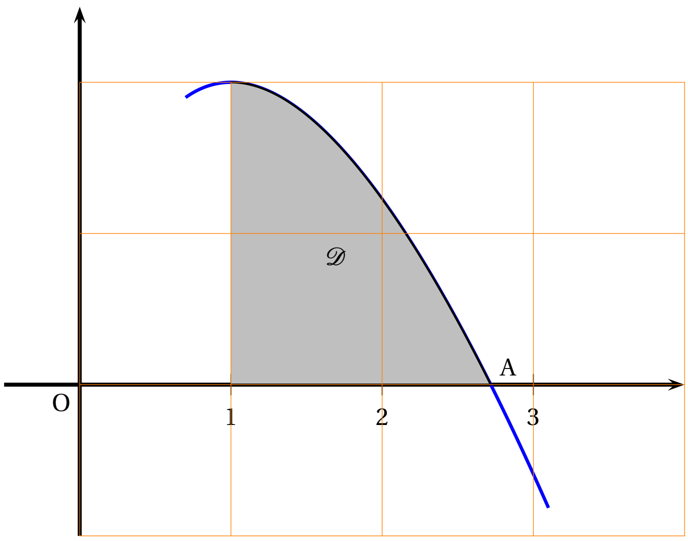
3. a. Sur $]0~;~+\infty[$, $f(x) \geqslant 0 \iff 2x(1 - \ln x) > 0$.
Un produit de facteurs est positif si les deux facteurs sont de même signe ; or sur $]0~;~+\infty[$, $2x > 0$: les deux facteurs ne peuvent être tous les deux négatifs.

Donc $f(x) \geqslant 0 \iff \left\{\begin{array}{l c l} 2x & > & 0 \\ \text{et} & & \\ 1 - \ln x & > & 0 \end{array}\right. \iff 1 > \ln x \iff \ln \text{e} > \ln x \iff$ $x < \text{e}$.

Conclusion $f(x) > 0 \iff 0 < x < \text{e}$ Géométriquement ceci signifie que la courbe $\mathscr{C}$ est au dessus de l'axe des abscisses entre O et A.

b. Sur $]0~;~+\infty[$, la fonction F est dérivable et :
$F'(x) = 2x\left(\dfrac{3}{2} - \ln x\right) + x^2\left(-\dfrac{1}{x}\right) = 3x - 2x\ln x - x = 2x - 2x\|nx = 2x(1 - \ln x)$.
Donc Fest bien une primitive de f sur $]0~;~+\infty[$.

c. On a vu à la question précédente que pour $x < \text{e}$, $f(x) > 0$, donc l'aire de la surface $\mathscr{D}$ est égale (en unité d'aire) à l'intégrale :
$\displaystyle\int_1^{\text{e}} f(x)\,\text{d}x = [F(x)]_1^{\text{e}} = F(\text{e}) - F(1) = \text{e}^2\left(\dfrac{3}{2} - \ln \text{e}\right) - 1\left(\dfrac{3}{2} - \ln 1\right) = \dfrac{\text{e}^2}{2} - \dfrac{3}{2} = \dfrac{\text{e}^2 - 3}{2}$.



On a $\mathscr{A}(\mathscr{D}) \approx 2,19$ u. a. (ce que confirme approximativement la figure).